

Gottfried Gabriel

Traditionelle und moderne Logik

Der folgende Beitrag untersucht einige philosophische Aspekte des Verhältnisses von moderner und traditioneller Logik, wobei Fragen der Modallogik im Mittelpunkt stehen.¹

Unter traditioneller Logik wird im allgemeinen die Aristotelische Syllogistik bis zu Kant und darüber hinaus verstanden. Diese Bestimmung ist nicht ganz unproblematisch, weil die Tradition, insbesondere in der megarisch-stoischen Logik und in der Logik des Mittelalters, Theorien entwickelt hat, in denen Ansätze der modernen Junktorenlogik vorweggenommen worden sind. Gleichwohl schließe ich mich hier der traditionellen Rede von „traditioneller Logik“ an. Traditionelle Logiken in diesem Sinne gibt es noch bis in das 20. Jahrhundert hinein. Dennoch beginnt die moderne Logik bereits im 19. Jahrhundert. Mit W. V. O. Quine gesprochen: „Logik ist ein altes Gebiet, und seit 1879 ist es zu einem großen geworden.“² Warum seit 1879? Nun, 1879 ist das Erscheinungsjahr von Freges *Begriffsschrift*, in der die heutige Aussagen- und Prädikatenlogik ihre Ausarbeitung gefunden hat. Wenn ich im folgenden von moderner Logik spreche, so meine ich in erster Linie deren Fregesche Gestalt.

Frege war bekanntlich Mathematiker und die Unzulänglichkeit der traditionellen Logik ist ihm insbesondere bei seinen Versuchen aufgegangen, mathematische Sätze und deren Beweise zu formalisieren. Dennoch erscheint das Verhältnis von traditioneller und moderner Logik in einem schiefen Licht, wenn die Gegenüberstellung in der Weise erfolgt, daß die moderne Logik als *mathematische* Logik charakterisiert wird. Mathematische Logik bestimmt einer ihrer herausragendsten Vertreter, Kurt Gödel, so, daß sie nichts anderes sei „als eine präzise und vollständige Formulierung der formalen Logik“.³ Erläuternd fährt Gödel fort, daß die mathematische Logik

¹ Es sind hier Überlegungen zusammengefaßt, die ich teilweise bereits in früheren Aufsätzen veröffentlicht habe. Auf Freges Schriften wird im folgenden unter Verwendung der üblichen Kurztitel mit Angabe der Seitenzahlen bzw. Paragraphen der Originale verwiesen.

² Quine, Logik, S. 9.

³ Gödel, Russell's Mathematical Logic, S. 125. Dt. Russells Mathematische Logik, S. V.

erstens ein Teilgebiet der Mathematik sei, in dem z.B. „statt von Zahlen [...] von Klassen“ gehandelt wird, und zweitens „eine allen anderen vorausgehende Wissenschaft, welche die Ideen und Prinzipien enthält, die sämtlichen Wissenschaften zugrundeliegen“. Gödel unterscheidet damit zwei Traditionen der mathematischen Logik: Mengenlehre und Mathesis universalis. In die zweite Tradition, die Gödel mit Leibniz beginnen läßt, stellt er Frege und Peano. Völlig zu Recht hebt er allerdings als wichtigen Unterschied hervor, daß Frege den logischen Kalkül hauptsächlich dazu benutzt, „die Arithmetik aus der reinen Logik abzuleiten“, während Peano mehr an den Anwendungen „innerhalb der Mathematik“ interessiert ist. Angesichts dieser Differenz fällt es schwer, den Fregeschen Typ der Logik überhaupt als ‚mathematische Logik‘ zu bezeichnen. Geht es Frege doch (im Rahmen seines Logizismusprogramms) gerade nicht um eine Mathematisierung der Logik, sondern umgekehrt um eine Logisierung der Mathematik (Arithmetik). Nach Freges Verständnis ist die Logik zwar mathematisch relevant, aber keineswegs mathematisch in ihrem Charakter.

Frege hat insbesondere den Bemühungen, die Logik zu algebraisieren, aus philosophischen Gründen widersprochen und deshalb die Verwendung von Additions- und Multiplikationszeichen in der Logik abgelehnt. Zu dieser Praxis der „Algebra der Logik“ ist auch Peano auf Distanz gegangen, indem er den logischen Formalismus von arithmetischen Symbolen befreit hat. Anlaß für die Vermischung hat die Analogie gegeben, die zwischen den Verknüpfungen der Multiplikation resp. Addition und den klassenlogischen Verknüpfungen des Durchschnitts resp. der Vereinigung besteht. Diese Analogie hat dazu geführt, daß auch in der Aussagenlogik von „logischem Produkt“ und „logischer Summe“ gesprochen wird, wobei die logische Summe aber gerade nicht dem ‚und‘ (Konjunkt), sondern dem nicht-ausschließenden ‚oder‘ (Adjunkt) und das logische Produkt dem ‚und‘ entspricht. Diese Redeweise, die Frege bewußt vermeidet, findet sich noch bei B. Russell,⁴ der ansonsten Peano darin folgt, logische und arithmetische Symbole zu unterscheiden.⁵

Soweit man Frege als den Begründer der modernen Logik betrachtet, sollte man die Differenz zwischen moderner und traditioneller Logik daher besser nicht an der Bestimmung ‚mathematisch‘ festmachen. Dabei gilt es nicht nur, der Vereinnahmung der Logik durch die Mathematik zu widersprechen, sondern auch, dementsprechenden Fehldeutungen von philosophischer Seite entgegenzuwirken. Zu solchen Fehldeutungen gehört z.B.,

⁴ Whitehead/Russell, *Principia Mathematica*, Bd. I, S. 6, dt. S. 14.; vgl. ferner Wittgenstein, *Tractatus* 3.42.

⁵ Vgl. Whitehead/Russell, a.a.O., S. 2f., dt. S. 5.

Freges Reduktion der Kantischen Urteilsformen in § 4 der *Begriffsschrift* auf ein spezifisch mathematisches Erkenntnisinteresse zurückzuführen.⁶

Tatsächlich setzt Frege in diesem Teil seiner Überlegungen lediglich das Werk fort, das Vertreter der traditionellen Logik bereits vor ihm begonnen haben. Zu nennen sind insbesondere H. Lotze, C. Sigwart und F. Brentano, aber auch schon deren Vorgänger J. F. Herbart und B. Bolzano.⁷ Frege geht mit seiner Reduktion freilich am weitesten, indem er das assertorische Urteil, nämlich die Anerkennung eines Inhalts (Gedankens) als wahr, als einzige Art des *Urteils* beibehält. Die traditionellen Unterscheidungen sind jedoch nicht ersatzlos verschwunden. Vielmehr erscheinen die *Urteilsformen* nunmehr als *Inhaltsformen*, als logische Strukturen beurteilbarer Inhalte (Aussagen, Propositionen). Einen Vorläufer hat Frege hier in Sigwart, für den das Urteil ebenfalls „in der Behauptung selbst liegt“⁸, und der deshalb erklärt:

Was gewöhnlich als Verschiedenheit der *Urteilsformen* aufgeführt wird, ist eine Verschiedenheit des *Inhalts*, und hängt von der Beschaffenheit der Subjekte und Prädikate ab.⁹

Erst die Art der formalen Strukturierung der Inhalte macht den wesentlichen Unterschied zwischen moderner und traditioneller Logik aus.

Kennzeichen der modernen Logik ist die junktoren- und quantorenlogische Strukturierung der Inhalte. Voraussetzung hierfür ist die Ersetzung der Subjekt/Prädikat-Struktur des Urteils (bzw. des beurteilbaren Inhalts) durch die Argument/Funktion-Struktur. Ein besonderer Vorzug der modernen Logik ist, daß sie die Iterierung von Quantifizierungen in unterschiedlichen Verschränkungen ermöglicht und damit entscheidende technische Vorteile bei der Analyse verwickelterer Aussagen besitzt. Darüber hinaus hat die funktionale Auffassung aber auch eine befriedigende Erklärung der Einheit des Urteils (der prädikativen Elementaraussage) ermöglicht. Diese Einheit kommt, mit Frege gesprochen, durch die Sättigung eines Ungesättigten zustande, ohne daß es dazu noch der Kopula als eines eigenen (Subjekt und Prädikat verbindenden) Bestandteils bedürfte. Gehen wir Freges Behandlung der traditionellen Urteilsformen kurz durch.

Unter dem Gesichtspunkt der Quantität des Urteils berücksichtigt Frege nur das allgemeine und das singuläre Urteil. Den Unterschied bestimmt er

⁶ Wolff, Die Vollständigkeit der kantischen Urteilstafel, S. 310f.

⁷ Vgl. Anm. 12. Einen detaillierten Überblick über die frühe Diskussion gibt Bolzano, Wissenschaftslehre, §§ 185–194.

⁸ Sigwart, Logik, Bd. I, S. 312. Das Urteil sieht Sigwart (an der Subjekt/Prädikat-Struktur orientiert) im kategorischen Urteil vollzogen, Frege dagegen (mit Blick auf die „behauptende Kraft“) im assertorischen Urteil.

⁹ Sigwart, a. a. O., S. 313.

jedoch nicht als „Unterschied der Urteile, sondern der Inhalte“. (Abweichend von Kant und der Tradition wird das singuläre Urteil als „besonderes“ bezeichnet. Dieser Terminus wird üblicherweise für das partikuläre Urteil verwendet, das sich bei Frege jedoch als spezielle Form des allgemeinen Urteils darstellt: Der Existenzquantor wird mit Hilfe des Allquantors und des Negators ausgedrückt.) Dem allgemeinen Urteil entspricht bei Frege die Unterordnung von Begriffen, dem singulären Urteil das Fallen eines Gegenstandes unter einen Begriff.

Bei der Behandlung der Qualität des Urteils läßt Frege das unendliche Urteil aus. Hierin schließt er sich der Tendenz nachkantischer Autoren an, die Verneinung des Prädikatbegriffs nicht als eigenständige Verneinung aufzuführen. (Auch Kant besteht nur im Rahmen der transzendentalen Logik darauf, daß es einen Unterschied zwischen verneinendem und unendlichem Urteil gebe.) Ferner erkennt Frege keine Verneinung der Kopula und keinen Akt der Verneinung (keine illokutionäre Verneinung) an. Das illokutionär verneinende Urteil wird auf die assertorische Beurteilung eines propositional verneinten Inhalts zurückgeführt, indem die Verneinung ausschließlich als „Merkmal eines *beurteilbaren Inhalts*“ angesehen wird. Die Unterscheidung zwischen bejahenden und verneinenden *Urteilen* entfällt, weil der Bejahungsakt im Urteilsakt, der dem assertorischen Urteil entspricht, aufgehoben ist. Aber auch für die Inhalte wird die Auffassung abgelehnt, daß sie als solche bejaht oder verneint sind.¹⁰

Die Relation des Urteils kommentiert Frege mit einem einzigen Satz:

Die Unterscheidung der Urteile in kategorische, hypothetische und disjunktive scheint mir nur grammatische Bedeutung zu haben.¹¹

Wenn Frege in einer Anmerkung hinzufügt, daß die Begründung „aus der ganzen Schrift“ hervorgehen werde, so verweist er damit auf die Möglichkeit, die einzelnen Junktoren wechselseitig (mit Hilfe des Negators) durch einander zu definieren, z. B. den Adjunktor (bzw. Disjunktor) durch den Subjunktor und umgekehrt. Auch diese Auffassung findet sich, wenn auch noch nicht in wahrheitswertfunktionaler Durchführung, bereits bei Sigwart ausgesprochen:

Sieht man auf den Gehalt der Behauptung, so sind kategorische und hypothetische, hypothetische und disjunktive Sätze vielfach nur grammatisch verschiedene Ausdrücke desselben Gedankens.¹²

¹⁰ Vgl. Nachgelassene Schriften, S. 162: „Es ist mir wenigstens kein logisches Gesetz bekannt, bei dem eine Einteilung der Gedanken in die Klassen der bejahenden und verneinenden in Betracht käme.“

¹¹ Begriffsschrift, § 4.

¹² Sigwart, Logik, Bd. I, S. 283. Vgl. bereits Bolzano (Wissenschaftslehre, § 193, Abschn. 1), der bemerkt, daß Herbart „der Meinung zu sein scheint, daß aller Unterschied zwischen