3. Kommentarteil

3.1 Kommentar des Vorworts der GGA

Vorwort.

Man findet in diesem Buche Lehrsätze, auf denen die Arithmetik beruht, mit Zeichen bewiesen, deren Ganzes ich Begriffsschrift nenne. Die wichtigsten dieser Sätze sind am Ende zum Theil mit angefügter Uebersetzung zusammengestellt. Wie man sieht, sind die negativen, gebrochenen, irrationalen und complexen Zahlen hier noch von der Betrachtung ausgeschlossen, ebenso auch Addition, Multiplication u. s. w. Auch die Sätze von den Anzahlen sind noch nicht in der zuerst geplanten Vollständigkeit vorhanden. Insbesondere fehlt noch der Satz, dass die Anzahl der unter einen Begriff fallenden Gegenstände endlich ist, wenn die Anzahl der Gegenstände endlich ist, die unter einen übergeordneten Begriff fallen. Aeussere Gründe haben mich bestimmt, dies, sowie die Behandlung der andern Zahlen und der Rechnungsarten einer Fortsetzung vorzubehalten, deren Erscheinen von der Aufnahme abhängig sein wird, die dieser erste Band findet. Was ich hier geboten habe, mag hinreichen, von meiner Weise eine Vorstellung zu geben. Man könnte meinen, dass die Sätze über die Anzahl Endlos[1] hätten fehlen können. Zur Begründung der Arithmetik im hergebrachten Umfange sind sie allerdings nicht nöthig; aber ihre Ableitung ist meist einfacher als die der entsprechenden Sätze für endliche Anzahlen und kann als Vorbereitung für sie dienen. Noch kommen Sätze vor, die nicht von Anzahlen handeln, die aber zu den Beweisen gebraucht werden. Sie handeln z. B. vom Folgen in einer Reihe, von der Eindeutigkeit von Beziehungen, von zusammengesetzten und gekoppelten Beziehungen, von der Abbildung durch Beziehungen u. dergl. Diese Sätze könnte man vielleicht einer erweiterten Combinationslehre zuweisen.

1 Anzahl einer abzählbar unendlichen Menge.

In diesem 1. Absatz des Vorwortes zum I. Band der *Grundgesetze* (GGA) beschreibt Frege den Inhalt des Buches und grenzt ihn gegen den des geplanten II. Bandes ab. Es geht ihm hier um grundlegende Theoreme der Arithmetik als der Lehre von den „Anzahlen“, und das sind hier die natürlichen Zahlen $0, 1, 2, 3, \ldots$ sowie die „Anzahl Endlos“, d.i. die Kardinalzahl der Menge der natürlichen Zahlen. Die über diese Menge hinausgehenden Bereiche der ganzen, der rationalen, der reellen und der komplexen Zahlen sollen im II. Band behandelt werden. – Vorausgesetzt für die Beweise der arithmetischen Lehrsätze und ebenfalls bewiesen werden Theoreme über Relationen und Funktionen, die Frege „einer erweiterten Combinationslehre“ zuordnet. Darunter haben wir ein Stück Logik zweiter (gegebenenfalls auch höherer) Stufe zu verstehen. Ein Beispiel ist der Lehrsatz 17, den Frege auf S. 242 folgendermaßen in die natürliche Sprache übersetzt: „Eine aus zwei

Beziehungen zusammengesetzte Beziehung ist eindeutig, wenn jene es sind.“ – Freges einleitender Hinweis auf Beweise „mit Zeichen […], deren Ganzes ich Begriffsschrift nenne“ klingt bescheiden. Tatsächlich verwendet Frege die von ihm entwickelte Logik zweiter Stufe, die auch einen widerspruchsfreien und vollständigen Kalkül der Prädikatenlogik erster Stufe enthält. Dieses erste Logiksystem seiner Art hat Frege 1879 als *Begriffsschrift* (BS) veröffentlicht.

Die Beweise sind allein in den mit „Aufbau“ überschriebenen Paragraphen enthalten, während die mit „Zerlegung“ überschriebenen das Verständniss erleichtern sollen, indem sie vorläufig den Gang des Beweises in groben Umrissen vorzeichnen. Die Beweise selbst enthalten keine Worte, sondern sind allein mit meinen Zeichen geführt. Sie stellen sich dem Auge dar als
VI eine Reihe von Formeln, die durch ausgezogene oder | unterbrochene Striche oder andere Zeichen getrennt sind. Jede dieser Formeln ist ein vollständiger Satz mit allen Bedingungen, die zu seiner Gültigkeit nothwendig sind. Diese Vollständigkeit, welche stillschweigend hinzuzudenkende Voraussetzungen nicht duldet, scheint mir für die Strenge der Beweisführung unentbehrlich zu sein.

Der Fortschritt von einem Satze zum nächsten geht nach den Regeln vor sich, die im § 48 zusammengestellt sind, und kein Uebergang geschieht, der nicht diesen Regeln gemäss wäre. Wie und nach welcher Regel die Folgerung gemacht wird, deutet das zwischen den Formeln stehende Zeichen an, während ————•———— eine Schlusskette abschliesst. Es muss hierbei Sätze geben, die nicht aus andern abgeleitet werden. Solche sind theils die Grundgesetze, die ich im § 47 zusammengestellt habe, theils die Definitionen, die man am Ende in einer Tafel vereinigt findet mit Hinweis auf die Stellen, wo sie zuerst vorkommen. Bei einer Fortsetzung dieses Unternehmens wird immer wieder das Bedürfniss von Definitionen hervortreten. Die Grundsätze, die dabei maassgebend sein müssen, sind im § 33 aufgeführt. Die Definitionen sind nicht eigentlich schöpferisch und dürfen es, wie ich glaube, nicht sein; sie führen nur abkürzende Bezeichnungen (Namen) ein, die entbehrt werden könnten, wenn nicht sonst die Weitläufigkeit unüberwindliche äussere Schwierigkeiten machte.

Im 2. und 3. Absatz beschreibt Frege seine Anforderungen an die Beweise, die er führen wird. Im 6. Absatz und auch im Vorwort zur BS formuliert er die Forderungen auch als „Lückenlosigkeit der Schlussketten“. Freges Vorstellungen sind vollständig in die Beweisbegriffe der klassischen modernen Logik eingegangen. Zunächst einmal ist ein Beweis eine Folge von gültigen Sätzen. Der Begriff „Gültigkeit“ bleibt hier im Vorwort etwas in der Schwebe. Als ungefähres Explikat bietet sich die *logisch-begriffliche Wahrheit* an. Diese darf aber nur für diejenigen Sätze in einer Beweisfolge vorausgesetzt werden, die entweder Grundgesetze sind oder Definitionen. Alle anderen Sätze müssen nach fest vorgegebenen Regeln aus vorhergehenden Sätzen der Folge gewonnen („abgeleitet“) werden. Einen Beweisschritt von einem Satz zum nächsten bezeichnet Frege hier als „Folgerung“, und er fordert, dass jede Folgerung durch Hinweis auf die ihr zugrunde liegende Regel gerechtfertigt wird. Die von Frege in Beweisen als Sätze zugelassenen Definitionen sind